ДИС 10.01.13

Да се пресметне границата

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) = \frac{t - \sin t}{t \sin t}$$

Правило на Лопитал за граница от вида $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{\psi(x)}$, f и ψ са диференцируеми в околност (околност) на x_0

Ако $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\psi'(x)} = L$ то $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\psi(x)} = 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{(t - \sin t)'}{(t \sin t)'} = \frac{1 - \cos t}{\sin t + t \cos t}$$

$((t \sin t)' = t' \sin t + t \sin t' = 0' \sin t + t \cos t =$
$= 1 \cdot \sin t + t \cos t = \sin t + t \cos t)$

Прилагаме правилото на Лопитал отгоре

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1 - \cos t)'}{(\sin t + t \cos t)'} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{\cos t + \cos t - t \sin t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{2 \cos t - t \sin t} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{т.е.}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{\sin t - t \cos t} = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t \to 0} \frac{t - \sin t}{t \sin t} = 0$$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$; $\operatorname{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$

ДМ $x + e^x > 0 \Rightarrow e^x > -x$

$$\operatorname{ctg}x' = \frac{(\cos x)'}{(\sin x)'} = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{ctg}x \ln(x+e^x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+e^x)}{\operatorname{tg}x}$$

Применяем правило Лопиталя

$$\lim \frac{(\ln(x+e^x))'}{\operatorname{tg}'x} = \frac{\frac{1}{x+e^x}(1+e^x)}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos^2 x (1+e^x)}{x+e^x} = \frac{1^2(1+1)}{0+1} = 2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{ctg} \ln(x+e^x) = 2$$

$$\lim_{x\to 1} x^{2e^{\sqrt{x}}} = 1^{2e^{\sqrt{1}}} = e$$

---

(2)

$$\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(\ln x)}$$

$$f(x)^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\ln f(x)}$$

поради непрекъснатост на $e^x \Rightarrow$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln(\ln x)}$$ откъдето смятаме

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(\ln x))'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0}\frac{1}{0} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln(\ln x)} = e^0 = 1$$

$\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$ = неопределеност от вида 1^∞

$$e^{\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)} \to e^{0.\infty}$$

Ако $x \to x_0$ то $e^x \to e^{x_0}$ т. е. функцията е непрекъсната $\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)}$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} \Rightarrow$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}}$$ разглеждаме

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}$ – неопределеност от вида $\frac{0}{0}$ прилагаме Лопитал

Взимаме производната на числителя и производната на знаменателя поотделно

$$\left.\begin{aligned}(\ln(2-x))' &= \frac{1}{2-x}\cdot(2-x)' = -\frac{1}{2-x}\\ \text{сметаме}\\ \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}\right)' &= \frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\left(\frac{\pi x}{2}\right)' = -\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}}{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{2}}{2-\pi} = \frac{2}{\pi}\Rightarrow$$

$$e^{\frac{2}{\pi}}$$

Ако $f\in C^n([a,b])$ - множеството от всички функции $f[a,b]\to\mathbb{R}$, които имат непрекъснати производни до ред n включително

Забележка

$C^0[a,b] = C([a,b])$ - непрекъсната функция

В интервал (a,b), то полинома

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

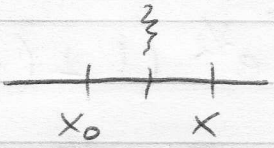
$= T_{f(x_0)}$ се нарича полином на Тейлор от n-та степен за f в околност на $x_0\in(a,b)$

Формула на Тейлър за функцията в околност x_0 се нарича всяко изразяване на $f(x) - T_{f(x_0)}$ по някакъв начин (като функцията на x в околност на x_0)

$$f(x) - T_{f(x_0)} = R(x) - \text{остатък}$$

Форма на Лагранж

$$R(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$



Задача

За функцията e^x и $\sin x$ намерете полинома на Тейлър от n-та степен в околност на $x=0$. Да се пресметне приближено $\sin 5^0$, е

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

Нека $f(x_0) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$e^x = e^0 + \frac{e^0(x-0)}{1!} + \frac{e^0(x-0)^2}{2!} + \dots + \frac{e^0(x-0)^n}{n!} =$$

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad 0 < \xi < x \quad (\text{или } x < \xi < 0)$$

за да намерим с точност до четвърти знак от десетичната дроб число $\varepsilon = 10^{-3}$

и слагаме $x = 1$ и искаме $\frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < 10^{-3}$

$\Rightarrow n = 6$ т.е. $7.6.5.4.3.2.1 = 5040$
при $n = 5 \Rightarrow 6.5.4.3.2.1 = 720 > 10^{-3}$

$\Rightarrow e \sim 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{6!}$ $\boxed{0! = 1}$!!!

$e^{1/2}\left(1 + \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \dots + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{n+1}\right.$

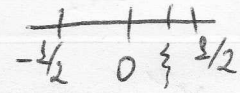
$\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{1/2}}{2^k k!}$ искаме $\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < 10^{-3} \Rightarrow n = 4$

Да се установи каква точност осигурява приближението $|x| < \frac{1}{2}$

$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots$

Търсим разликата между $\cos x$ и полинома $1 - \frac{x^2}{2}$ т.е.



$\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{(\cos x)'''_{x=\xi}}{3!} x^3$

$(\cos x)' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
$(\cos x)'' = -\sin x\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$

$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$$\cos x = \cos 0 + \cos\frac{\pi}{2}x + \cos\frac{2\pi}{2}\frac{x^2}{2!} + \dots + \cos\frac{n\pi}{2}\frac{x^n}{n!} +$$

$$+ \cos\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \text{остатъка}$$

$$n = 2 \Rightarrow 1 - \frac{x^2}{2!} + \cos\left(\xi + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{x^3}{3!}$$

$$x^3 = \cos\left(\xi + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{x^3}{3!} = \sin\xi\,\frac{x^3}{3!}$$

$$\cos\left(\xi + \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\xi \quad \sin\frac{3\pi}{2} = \sin\xi$$

$$|\sin z| \le 1 \qquad \text{при } |\xi| < \frac{1}{2}$$

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{|x|^3}{3!} < \frac{1}{8\cdot 3!} = \frac{1}{48}$$

Грешката на разликата между $\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ е $1/48$

може да рационализираме $1/48$ до друго число т.е. $1/48 < 1/40 = 0{,}025$

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ остатъка $(x-x_0)^n$ при $x \to x_0$

Сравняме

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n} = 0 = \underset{\text{малко}}{o}\left((x-x_0)^n\right)$$

Казваме че $f(x) = \underset{\text{малко}}{o}(g(x))$ при $x \to x_0$ ако

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Да се смята границата $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{x^3} \to \frac{0}{0}$

Прилагаме формулата на Тейлър за $(1+x)^\alpha$ при $\alpha \in \mathbb{R}$ смятаме полинома на Тейлър от трета степен в околност $x=0$

$$(1+x)^\alpha = 1 + ((1+x)^\alpha)'_{x=0} x + ((1+x)^\alpha)''_{x=0} \frac{x^2}{2!} + ((1+x)^\alpha)'''_{x=0} \frac{x^3}{3!} + \underset{\text{намо}}{o}(x^4)$$

$$((1+x)^\alpha)' = \alpha (1+x)^{\alpha-1}$$
$$((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \Rightarrow$$

$$1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \underset{\text{намо}}{o}(x^4)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{3}{2}\frac{1}{4}\frac{x^3}{3!} + \underset{\text{намо}}{o}(x^4)$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{x^3}{3!} + \underset{\text{намо}}{o}(x^4)$$

Е